INSPECTION D'ACADEMIE DE TAMBACOUNDA **Année scolaire 2023 / 2024**

Niveau : 1^{re} S2

Durée : 03heures

Composition harmonisée du premier semestre : Correction Epreuve de Mathématiques

NB : La qualité de la rédaction, la clarté et la rigueur dans le raisonnement seront prises en compte pour une grande partie dans l'appréciation des réponses données.

EXERCICE 1 : (08 Points)

1. a)

$$(S)\begin{cases} x+y+z=10 & L_1 \\ x-y+z=2 & L_2 \\ 4x-2y+z=31 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=10 & L_1 \\ 2y=8 & L'_2 \to L_1-L_2 \\ 6y+3z=9 & L'_3 \to 4L_1-L_3 \end{cases}$$

$L'_2 \Leftrightarrow y=4$; $L'_3 \Leftrightarrow z=-5$; $L_1 \Leftrightarrow x=11$ *d'où* $S=\{(11;4;-5)\}$

b. $P(x)=2x^3+ax^2+bx+c.$

$P(1)=12 \Leftrightarrow a+b+c=10 \quad (a)$;

$P(-1)=0 \Leftrightarrow a-b+c=2 \quad (b)$;

$P(-2)=15 \Leftrightarrow 4a-2b+c=31 \ (c)$

(a) ; (b) et (c) donnent $\begin{cases} a+b+c=10 & L_1 \\ a-b+c=2 & L_2 \\ 4a-2b+c=31 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow (S)$

b)Donc a = 11 ; b = 4 et c = −5 d'après 1a)

c) on a : $P(x)=2x^3+11x^2+4x-5$ d'après 1b)

d) Factorisons P(x) par la méthode de HORNER

On a P(- 1) = 0.

Coefficients de P(x)	2	11	4	-5
Racine - 1		-2	-9	5
Coefficients de G(x)	2	9	-5	0

Donc $g(x)=2x^2+9x-5$

$\Delta=81+40=121>0$ et $\sqrt{\Delta}=11$

$x_1 = \frac{-9-11}{4} = -5$ et $x_2 = \frac{-9+11}{4} = \frac{1}{2}$ donc P(x) = 2(x +1)(x + 5)(x $-\frac{1}{2}$).

e) On a P(x) = 0 $\Leftrightarrow$ 2(x +1)(x + 5)(x $-\frac{1}{2}$)= 0

$\Leftrightarrow$ x= -1 ou x = -5 ou x = $\frac{-1}{2}$ car 2$\neq$ 0

Donc P(x^2)=0$\Leftrightarrow$ $x^2 = -1$ impossible ou $x^2 = -5$ impossible ou $x^2 = \frac{1}{2}$

On a : $x^2 = \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$x = $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ $ou\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où S = $\left\{\frac{-\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

On a$|x-2| = \frac{1}{2}$ P($|x-2|$)=0$\Leftrightarrow$$|x-2| = -1$ impossible ou $|x-2| = -5$ impossible ou $|x-2| = \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$x = $\frac{5}{2}$ ou x = $\frac{3}{2}$ d'où S = $\left\{\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right\}$

2. Soient (D1) : 2x$-$3y$-$5 = 0 et (D2) : $-$3x + 2y +1 = 0

	A	B
x	1	4
y	-1	1

	E	F
X	-1	3
y	-2	4

3. On a g(x) = (x$-a$) (x$-b$) (x$-c$) = $x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x - abc$.

Or g(x) = x^3 $-$ 3x^2 $-$ 13x + 15 donc par identification, on a :$\begin{cases} a+b+c = 3 \\ abc = -15 \\ ab+bc+ac = -13 \end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} A = 3 \\ C = -15 \\ B = -13 \end{cases}$

On a : $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$

Donc $(a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc) = a^2+b^2+c^2$

$\Leftrightarrow D = a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc)$

$\Leftrightarrow D = a^2+b^2+c^2 = (3)^2 - 2(-13) = 9+26 = 35$

D = 35

EXERCICE 2 : (08 Points)

1) Résolvons dans IR les équations et inéquations suivantes :

a) $\sqrt{x^2-3x+2} = -x+1$ $\Leftrightarrow\begin{cases} \boldsymbol{-x+1 \geq 0} & \textbf{(1)} \\ \boldsymbol{x^2-3x+2 = (1-x)^2} & \textbf{(2)} \end{cases}$

$\textbf{(1)} \Leftrightarrow \boldsymbol{Dv =]-\infty; 1]}$

$(2) \Leftrightarrow \boldsymbol{x^2 - 3x + 2 = x^2 - 2x + 1}$

$\Leftrightarrow$ **x = 1** $\boldsymbol{\epsilon\ Dv}$

D'où S = {1}

b) $\sqrt{4x^2+4x+1} = \sqrt{x^2-x-6} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x^2 - x - 6 \geq 0} & (1) \\ \boldsymbol{4x^2 + 4x + 1 = x^2 - x - 6} & (2) \end{cases}$

$\boldsymbol{x^2 - x - 6 \geq 0}$ (1) **Δ = 1+24 = 25 > 0** et $\sqrt{\Delta} = 5$

$x_1 = \frac{1-5}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$

Donc DV = $]-\infty;\ -2] \cup [3;\ +\infty[$

$(2) \Leftrightarrow 3x^2 + 5x + 7 = 0$ **Δ = 25 - 84 = - 59 < 0 Pas de solution**

D'où S = Φ

c) $\sqrt{-2x^2+x+1} < x - 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x - 5 \geq 0} & (1) \\ \boldsymbol{-2x^2 + x + 1 \geq 0} & (2) \\ \boldsymbol{-2x^2 + x + 1 = (x-5)^2} & (3) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow \boldsymbol{S_1 = [5;\ +\infty[}$

(2) **on a : −2+1+1= 0 donc** $\boldsymbol{x_1 = 1\ et\ x_2 = \frac{-1}{2}}$ $\boldsymbol{S_2 = \left[\frac{-1}{2}; 1\right]}$

$(3) \Leftrightarrow \boldsymbol{3x^2 - 11x + 24 > 0}$

Δ=121−288 = −167< 0 donc $S_3 = IR$

Ainsi S = $\boldsymbol{S_1 \cap S_2 \cap S_3}$= **Φ**

d) $\sqrt{x^2+3x-2} \geq -x+3$

$\Leftrightarrow (SA) \begin{cases} \boldsymbol{-x + 3 \geq 0} & (1) \\ \boldsymbol{x^2 + 3x - 2 \geq 0} & (2) \\ \boldsymbol{x^2 + 3x - 2 \geq (3-x)^2} & (3) \end{cases}$ **ou** $(\boldsymbol{SB}) \begin{cases} \boldsymbol{-x + 3 < 0} & (4) \\ \boldsymbol{x^2 + 3x - 2 \geq 0} & (5) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow S_1 =]-\infty\ ; 3]$

(2) Δ = 9 +8 $= 17 > 0$ $x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$ $et\ x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ donc $S_2 =$ $]-\infty;\ x_1] \cup [x_2; +\infty[$

$(3) \Leftrightarrow$ 9x -11≥ 0 $\Leftrightarrow x \geq \frac{11}{9}$ donc $S_3 = \left[\frac{11}{9}; +\infty\right[$

D'où SA = $\boldsymbol{S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \left[\frac{11}{9}; 3\right]}$

$(4) \Leftrightarrow S_4 =]3; +\infty[$ et (5) Δ = 9 +8 $= 17 > 0$ $x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$ $et\ x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ donc $S_5 =]-\infty;\ x_1] \cup [x_2; +\infty[$ SB = $\boldsymbol{S_4 \cap S_5 = S_4}$

Ainsi S = SA ∪ SB = $\left[\frac{11}{9}; +\infty\right[$

2) On considère l'équation (E_m) : $(\text{m}-3)x^2 - 2(m+2)x + m - 5 = 0$.

a. Discutons suivant les valeurs de m les solutions de (E_m).

- Si m-3 = 0 ⟺m = 3 alors (E_m) devient : $0.x^2 - 2(5)x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{5}$

Donc S = $\left\{\frac{-1}{5}\right\}$

- Si m-3 ≠ 0 ⟺m ≠ 3 alors (E_m) devient :
  (m−3)$x^2 - 2(m+2)x + m - 5 = 0$
  Δ'm = $(m+2)^2 - (m-3)(m-5)$ = 12m−11
  Δ'm = 0 ⟺m = $\frac{11}{12}$
  Tableau de signes

m	$-\infty$	$\frac{11}{12}$	3	$+\infty$
Δ'm	$-$	$+$	‖	$+$

- Si m ϵ $\left]-\infty\,;\,\frac{11}{12}\right[$ alors $\Delta' m < 0$ donc S = Φ
- Si m = $\frac{11}{12}$ alors Δ'm = 0 et on a : $x_0 = \frac{-b\prime}{a} = \frac{m+2}{m-3} = \frac{-7}{5}$ donc S = $\left\{\frac{-7}{5}\right\}$
- Si m ϵ $\left]\frac{11}{12};\,+\infty\right[\setminus\{3\}$ alors Δ' > 0 donc (E_m) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2.
  $x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{m+2-\sqrt{12m-11}}{m-3}$ et $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{m+2+\sqrt{12m-11}}{m-3}$
  Donc S = $\{x_1;\ x_2\}$

b) (E_m) admet deux solutions positives ⟺ $\begin{cases}\Delta' > 0\\ S > 0\\ P > 0\end{cases}$ ⟺ $\begin{cases}12m-11 > 0\ (1)\\ \frac{2(m+2)}{m-3} > 0\quad(2)\\ \frac{m-5}{m-3} > 0\quad(3)\end{cases}$

(1)⟺ $S_1 = \left]\frac{11}{12};\,+\infty\right[\setminus\{3\}$

(2) Dressons le tableau de signes.

m	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
m + 2	$-$	$+$		$+$
m−3	$-$	$-$		$+$
S	$+$	$-$	‖	$+$

Donc $S_2 =]-\infty;\ -2[\ \cup\ ]3;\ +\infty[$

(3) Dressons le tableau de signes.

m	$-\infty$	3	5 $\quad +\infty$
m - 5	$-$	$-$	$+$
m$-$3	$-$	$+$	$+$
P	$+$	$-$	$+$

Donc $S_3 =]-\infty\,;\,3[\,\cup\,]5\,;\,+\infty[$

Ainsi S = $\boldsymbol{S_1 \cap S_2 \cap S_3 =]5\,;\,+\infty[}$

b) (E_m) admet deux solutions opposées $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P < 0 \\ S = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12m - 11 > 0 \ (1) \\ \frac{2m+4}{m-3} = 0 \quad (3) \\ \frac{m-5}{m-3} < 0 \quad (2) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow S_1 = \left]\frac{11}{12};\,+\infty\right[\setminus \{3\}$

(2) $\Leftrightarrow \quad S_2 =]3\,;\,5[$

(3) $\Leftrightarrow$ m = -2 car m – 3 $\neq$ 0 $\Leftrightarrow S_3 = \{-2\}$

S = $\boldsymbol{S_1} \cap \boldsymbol{S_2} \cap S_3 = \emptyset$

c) On a **:** $\boldsymbol{(x_1 + 2)(x_2 + 2) = 0}$

$\Leftrightarrow$P + 2S + 4 = 0 avec P = $\frac{m-5}{m-3}$ et S = $\frac{2m+4}{m-3}$

$\Leftrightarrow \frac{9m-9}{m-3} = 0 \Leftrightarrow$9m $-$9 = 0 car m $-$3$\neq$ 0

$\Leftrightarrow$ m =1

EXERCICE 3 : (04 Points)

Déterminer une mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$(\overrightarrow{IC};\overrightarrow{IE}) = (\overrightarrow{IC};\overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IE}) = \frac{-\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$

$(\overrightarrow{ID};\overrightarrow{IF}) = (\overrightarrow{ID};\overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IF}) = -\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = \frac{-3\pi}{2}\,[2\pi]$

$(\overrightarrow{IF};\overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{IF};\overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}) = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{12}\,[2\pi]$

$(\overrightarrow{IF};\overrightarrow{IE}) = (\overrightarrow{IF};\overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IE}) = \frac{3\pi}{4} - \frac{5\pi}{6} = \frac{-\pi}{6}\,[2\pi]$

Fin de la correction